אנליזה הרמונית (0509-2843)

רון גולדמן

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה. יהי $\mathbb{F}$ שדה (בקורס זה $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). קבוצה V יחד פעולת חיבור $+ : V \times V \to V$ ופעולת כפל בסקלר מ-$\mathbb{F}$ $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ נקראת **מרחב וקטורי** מעל $\mathbb{F}$ אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. אסוציאטיביות החיבור: לכל $v_1, v_2, v_3 \in V$ מתקיים $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
2. קומוטטיביות החיבור: לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
3. קיום איבר נייטרלי ביחס לחיבור: קיים איבר $0 \in V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $v + 0 = v$.
4. קיום איבר נגדי: לכל $v \in V$ קיים $u \in V$ כך ש-$v + u = 0$.
5. אסוציאטיביות הכפל בסקלר: לכל $v \in V$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha\beta) v = \alpha (\beta v)$.
6. דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר ביחס לחיבור ב-V: לכל $v_1, v_2 \in V$ ו-$\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha (v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$.
7. דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר ביחס לחיבור ב-$\mathbb{F}$: לכל $v \in V$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$.
8. נייטראליות הכפל ב-$1 \in \mathbb{F}$: לכל $v \in V$ מתקיים $1 \cdot v = v$.

אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז V יקרא מרחב וקטורי ממשי ואם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז V יקרא מרחב וקטורי מרוכב.

הגדרה. יהי שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $a < b$ מספרים ממשיים. נסמן ב-$\boldsymbol{C_{\mathbb{F}}[a,b]}$ את **קבוצת הפונקציות הרציפות** $\boldsymbol{f : [a,b] \to \mathbb{F}}$.

טענה. יהי שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $a < b$ מספרים ממשיים. $C_{\mathbb{F}}[a,b]$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עם החיבור והכפל בסקלר של פונקציות רגילות.

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תת קבוצה $U \subseteq V$ הינה **תת-מרחב** של V אם היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות ב-V.

טענה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תת קבוצה $U \subseteq V$ הינה תת-מרחב של V אמ"מ $U \neq \emptyset$ ו-U סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר.

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ נקראת **מכפלה פנימית** של V אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. חיוביות: לכל $v \in V$ מתקיים $\langle v, v \rangle \geq 0$ ו-$\langle v, v \rangle = 0$ אמ"מ $v = 0$.
2. סימטריות מוצמדת: לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
3. לינאריות במשתנה הראשון: לכל $u, v, w \in V$ ו-$\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, v \rangle, \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

אם $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה פנימית של V, אומרים ש-$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ **מרחב מכפלה פנימית**.

דוגמה. בקורס אלגברה לינארית ראינו מספר מכפלות פנימיות:

1. **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}} : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ שהוגדרה באופן הבא. לכל

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

מתקיים

$$\langle x, y \rangle_{\text{st}} = \overline{y}^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

2. $\langle\cdot,\cdot\rangle : C_{\mathbb{F}}[a,b]\times C_{\mathbb{F}}[a,b]\to\mathbb{F}$ כך שלכל $f,g\in C_{\mathbb{F}}[a,b]$ מתקיים

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

הגדרה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $\|\cdot\| : V\to\mathbb{F}$ נקראת **נורמה** מעל אם היא מקיימת את שלוש התכונות הבאות:

1. חיוביות: לכל $v\in V$ מתקיים $\|v\|\geq 0$ ו-$\|v\|=0$ אמ"מ $v=0$.
2. הומוגניות: לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל $v\in V$ מתקיים $\|\alpha v\|=|\alpha|\cdot\|v\|$.
3. אי-שיוויון המשולש: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

אם V מרחב וקטורי עליו מוגדרת הנורמה $\|\cdot\|$ נאמר ש-$(V,\|\cdot\|)$ **מרחב נורמה**.

טענה. יהי $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. הפונקציה $\|\cdot\| : V\to\mathbb{F}$ המוגדרת כך שלכל $v\in V$

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

הינה נורמה, שנקראת **הנורמה המושרית** מ-$\langle\cdot,\cdot\rangle$.

דוגמה. עבור $V=\mathbb{F}^n$ הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית הסטנדרטית היא:

$$\forall v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.\ \ \|v\|_{\text{st}}=\sqrt{\langle v,v\rangle_{\text{st}}}=\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i\overline{v_i}}=\sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

משפט (כלל המקבילית (Parallelogram Law)). יהי $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\|\cdot\|$ הנורמה המושרית. אז לכל $x,y\in V$ מתקיים

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

משפט (פרשה פון-נוימן ז'ורדן (Frechet von-Neumann Jordan)). יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמה כך שהנורמה מקיימת את כלל המקבילית. אז הנורמה מושרית ממכפלה פנימית.

דוגמה. יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $0<p\in\mathbb{R}$. נגדיר פונקציה $\|\cdot\|_p : V\to\mathbb{F}$ באופן הבא: לכל $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ מתקיים

$$\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

טענה. בסימונים של הדוגמה הקודמת:

1. הפונקציה $\|\cdot\|_p$ הינה נורמה אמ"מ $p\geq 1$.
2. הנורמה $\|\cdot\|_p$ מושרית ממכפלה פנימית אמ"מ $p=2$.

הגדרה. עבור $p\geq 1$ ו-$a<b$ נגדיר את:

1. מרחבי הסדרות

$$\ell_p = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{F} \,\middle|\, \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} < \infty \right\}$$

$$\ell_\infty = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{F} \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

2. מרחבי הפונקציות

$$L_p\left[a,b\right] = \left\{ f:\left[a,b\right] \to \mathbb{F} \,\middle|\, \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f\left(x\right)|^p \, dx} < \infty \right\}$$

$$L_\infty\left[a,b\right] = \left\{ f:\left[a,b\right] \to \mathbb{F} \,\middle|\, \sup_{x\in[a,b]} |f\left(x\right)| < \infty \right\}$$

הערה.

1. ℓ_p, L_p מרחבי נורמה כאשר הנורמות הן

$$\left\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}$$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f\left(x\right)|^p \, dx}$$

כמו כן ℓ_∞, L_∞ מרחבי נורמה כאשר הנורמות הן

$$\left\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f\left(x\right)|$$

2. מרחבי הנורמה ℓ_2, L_2 שניהם מרחבי מכפלה פנימית כאשר המכפלות הפנימיות הן

$$\left\langle \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

$$\langle f,g\rangle_2 = \int\limits_a^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

3. עבור $1 \le p \le q$ ממשיים מתקיים $\ell_p \subseteq \ell_q$ ו-$L_q\left[a,b\right] \subseteq L_p\left[a,b\right]$.

4. כדי ש-L_p באמת יהיה מרחב נורמה נזהה פונקציות שנבדלות במספר סופי (או בן מניה) של נקודות כאותה פונקציה.

משפט (אי-שוויון קושי-שוורץ). יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. אז לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

כמו כן, שיוויון מתקיים אמ"מ u, v תלויים לינארית.

הגדרה. יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. נאמר ש-u, v **אורתוגונליים** (מאונכים) ונסמן $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ אם $\langle u, v \rangle = 0$.

הגדרה. יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. סדרת וקטורים $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ נקראת **מערכת אורתוגונלית** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $v_n \neq 0$.
2. לכל m, n שונים מתקיים $v_n \perp v_m$.

אם בנוסף לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|v_n\| = 1$ אז נאמר שהמערכת **אורתונורמלית**.

הערה. סדרת וקטורים $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ היא מערכת אורתונורמלית אמ"מ לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\langle v_m, v_n \rangle = \delta_{m,n}$.

משפט. לכל מרחב וקטורי קיים בסיס.

טענה. יהיו $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ו-$\{v_k\}_{k=1}^n \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית. יהיו $u, w \in V$ ויהיו $\{a_k\}_{k=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{F}$ כך ש-

$$u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k, w = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k$$

אז:

1. לכל $k \in [n]$ מתקיים $a_k = \langle u, v_k \rangle$.
2. $\langle u, w \rangle = \sum n_{k=1} a_k \overline{b_k}$.

הגדרה. בסימונים של הטענה הקודמת, המספרים $\{\langle u, v_k \rangle\}_{k=1}^n$ נקראים **מקדמי פורייה המוכללים** של u ביחס ל-$\{v_k\}_{k=1}^n$.

משפט. יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית.

1. **משפט פיתגורס**: אם $u, v \in V$ אורתוגונליים אז
$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$
2. **משפט פיתגורס המוכלל**: תהי $\{v_k\}_{k=1}^n \subseteq V$ מערכת אורתוגונלית ותהי $\{a_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{F}$. אז
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|v_k\|^2$$
בפרט, אם $\{v_k\}_{k=1}^n \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית, אז לכל $v \in \text{Span}\{v_k\}_{k=1}^n$ מתקיים
$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v, v_k \rangle|^2$$

הגדרה. יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. ותהי $\{v_k\}_{k=1}^n \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית, ויהי $U = \text{Span}\{v_k\}_{k=1}^n$. אז לכל $v \in V$ הוקטור

$$\tilde{v} = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle v_k$$

נקרא **ההיטל האורתוגונלי** של v על U.

טענה. בסימונים של ההגדרה הקודמת. יהי $u \in U$, אז:

1. $\langle v-\tilde{v}, u\rangle = 0$.
2. $\|v-u\|^2 = \|v-\tilde{v}\|^2 + \|\tilde{v}-u\|^2$.

הגדרה. יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמה ויהיו $u, v \in V$. **המרחק** בין u ו-v מוגדר להיות $\|u-v\|$.

משפט (הקירוב הטוב ביותר). יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_k\}_{k=1}^n \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית. נסמן $U = \operatorname{Span}\{v_k\}_{k=1}^n$ ויהי $v \in V$. אז $\tilde{v}$ הוא הוקטור הקרוב ביותר ל-v השייך ל-U. כמו כן, $\tilde{v}$ הינו הוקטור היחיד ב-U שמרחקו מ-v מינימלי.

טענה. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_k\}_{k=1}^n \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית. אז לכל $v \in V$ מתקיים

$$\|v\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle v, v_k\rangle|^2$$

משפט (אי-שוויון בסל (Bessel)). יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית. אז לכל $v \in V$ מתקיים

$$\|v\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, v_n\rangle|^2$$

הגדרה. אם עבור $v \in V$ מתקיים שוויון באי-שוויון בסל, נאמר שמתקיים **שוויון פרסבל** (Parseval) עבור v.

משפט (הלמה של רימן-לבג (Riemann-Lebesgue)). בסימונים של המשפט הקודם:

$$\lim_{n\to\infty} |\langle v, v_n\rangle| = 0$$

הגדרה. יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמה ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ סדרת וקטורים.

1. נאמר שהסדרה $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **מתכנסת בנורמה** ל-$v \in V$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n_0 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|v_n - v\| < \varepsilon$.
2. תהי $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{F}$ סדרת סקלרים, נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ **מתכנס בנורמה** ל-$v \in V$ ונכתוב

$$v \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$$

אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת בנורמה ל-v.

3. הסדרה $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n_0 < m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$.

הגדרה.

1. מרחב נורמה $(V, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** (Banach) או **מרחב שלם** אם כל סדרת קושי ב-V מתכנסת אל וקטור ב-V.
2. מרחב מכפלה פנימית $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ נקרא **מרחב הילברט** (Hilbert) אם $(V, \|\cdot\|)$ מרחב בנך תחת הנורמה המושרית מ-$\langle\cdot,\cdot\rangle$.

דוגמה.

1. המרחב $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ הוא מרחב בנך ו-$\left(\mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{st}}\right)$ מרחב הילברט.

2. לכל $1 \leq p \leq \infty$ ולכל $a < b$ ממשיים המרחבים ℓ_p ו-$L_p[a, b]$ הם מרחבי בנך. בפרט, ℓ_2 ו-$L_2[a, b]$ מרחבי הילברט.

3. המרחב $\left(C_{\mathbb{F}}[a, b], \|\cdot\|_\infty\right)$ הינו מרחב בנך.

4. המרחב $\left(C_{\mathbb{F}}[a, b], \|\cdot\|_1\right)$ אינו מרחב בנך.

הגדרה. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. מערכת אורתונורמלית $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ נקראת **שלמה** אם לכל $v \in V$ מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \ \langle v, v_n\rangle = 0 \to v = 0$$

במילים אחרות, $\left(\text{Span}\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)^{\perp} = \{0\}$.

הגדרה. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. מערכת אורתונורמלית $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ נקראת **סגורה** אם לכל $v \in V$ מתקיים

$$v \sim \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n\rangle\, v_n$$

משפט. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. מערכת אורתונורמלית $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ הינה סגורה אמ"מ לכל $v \in V$ מתקיים שיוויון פרסבל.

משפט. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית סגורה. אז המערכת שלמה.

טענה. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מערכת אורתונורמלית. אז לכל $v \in V$, סדרת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k\rangle\, v_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ הינה סדרת קושי. בפרט, אם V מרחב הילברט, אז קיים $v' \in V$ כך ש-v_n-$v' \sim \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n\rangle\, v_n$.

טענה (**רציפות המכפלה הפנימית**). יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהיינה $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ שתי סדרות סדרות המתכנסות בנורמה ל-u, v בהתאמה. אז

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle = \langle u, v\rangle$$

מסקנה. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{F}$. יהי $u \in V$ כך ש- $u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = \langle u, v_n\rangle$.

משפט. יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב הילברט ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית שלמה. אז המערכת סגורה.

משפט (פרסבל). יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מערכת אורתונורמלית סגורה. אז לכל $u, w \in V$ מתקיים

$$\langle u, w\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, v_n\rangle\, \overline{\langle w, v_n\rangle}$$

משפט (שלושת השקילויות). יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב הילברט. אזי הבאים שקולים:

1. $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית שלמה.

2. $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ מערכת אורתונורמלית סגורה.

3. לכל $u \in V$ מתקיים

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, v_n\rangle|^2$$

טורי פורייה

בפרק זה נתמקד במרחב הפונקציות $L_2[-\pi,\pi]$ (בהמשך נכליל לתחום $[a,b]$).

הגדרה. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{F}$.

1. נאמר ש-f **רציפה למקוטעין** אם היא רציפה, פרט למספר סופי (או בן מניה) של נקודות שבהם אי-הרציפות סליקה או קפיצתית. במילים אחרות אם קיים $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ כך שקיימים
$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$
כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים:
   (א) f רציפה ב-(x_{i-1},x_i).
   (ב) $\lim_{x\to x_i^-} f(x),\lim_{x\to x_{i-1}^+} f(x)$ קיימים וסופיים.
2. נאמר ש-f **חלקה למקוטעין** אם קיים $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ כך שקיימים
$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$
כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים:
   (א) f גזירה ברציפות ב-(x_{i-1},x_i).
   (ב) $\lim_{x\to x_i^-} f(x),\lim_{x\to x_{i-1}^+} f(x)$ קיימים וסופיים.
   (ג) $\lim_{x\to x_i^-} f'(x),\lim_{x\to x_{i-1}^+} f'(x)$ קיימים וסופיים.

הערה. כל פונקציה רציפה למקוטעין ו/או חלקה למקוטעין שייכת ל-$L_2[a,b]$. כמו כן, כל פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ היא רציפה למקוטעין וכל פונקציה גזירה ברציפות ב-$[a,b]$ היא חלקה למקוטעין.

טור פורייה הממשי

הגדרה. נזכור שבמרחב $L_2[-\pi,\pi]$ ניתן לקחת את המכפלה הפנימית
$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$
המשרה את הנורמה
$$\|f\|=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx}$$
ניקח את המערכת האורתונורמלית הסגורה
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\cup\{\sin nx\,|n\in\mathbb{N}\}\cup\{\cos nx\,|n\in\mathbb{N}\}$$
אז לכל $f\in L_2[-\pi,\pi]$ מתקיים
$$f(x)\sim\frac{a_0}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{1}$$

כאשר

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

ולכל $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \langle f, \cos nx \rangle$$

$$b_n = \langle f, \sin nx \rangle$$

אגף ימין של (1) נקרא **טור פורייה הממשי** של f. המספרים a_0, a_n, b_n נקראים **מקדמי פורייה** של f. הפיתוח שלהם נקרא **חישוב/פיתוח לטור פורייה**.

הערה.

1. התהליך המתאים לפונקציה את טור פורייה שלה הוא לינארי.
2. אם טור פורייה של f מתכנס נקודתית לכל $x \in [-\pi, \pi]$ אז ניתן לחשוב על הטור כפונקציה מחזורית-2π המוגדרת ב-$\mathbb{R}$.
3. אם f זוגית, אז טור פורייה שלה הוא מהצורה

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

ואם f אי-זוגית, אז טור פורייה שלה הוא מהצורה

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

4. מכיוון ששוויון פרסבל מתקיים, מתקבלת המשוואה

$$\|f\|^2 = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

טור פורייה המרוכב

הגדרה. ישנה וריאציה חשובה על טור פורייה הממשי. בכדי להגדיר אותה, נשנה במקצת את המכפלה הפנימית:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

המשרה את הנורמה

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx}$$

ניקח את המערכת האורתונורמלית הסגורה

$$\left\{ e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

עבור $f \in L_2[-\pi, \pi]$ מסמנים

$$c_n = \left\langle f, e^{inx} \right\rangle$$

אז

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{2}$$

הטור ב-(2) נקרא **טור פורייה המרוכב** של f.

טענה. תהי $f \in L_2[-\pi,\pi]$ ויהיו

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

טורי פורייה הממשי והמרוכב של f. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

.1

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{2}c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

מסקנה. לכל $f \in L_2[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

הערה. עבור טור פורייה המרוכב, שוויון פרסבל הינו מהצורה

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

הערה. אם $f \in L_2[-\pi,\pi]$ ו-c_n מקדמי פורייה המרוכבים שלה, נהוג לסמן $\hat{f}(n) = c_n$.

הערה. התחום $[-\pi,\pi]$ בו עבדנו הינו נפוץ אך שרירותי. נראה כעת כיצד נראות המערכת הממשית והמערכת המרוכבת בתחום כללי $[a,b]$ עבור $a<b$:

1. המערכת הממשית מוגדרת באופן הבא

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \cup \left\{ \sin\frac{2\pi nx}{b-a} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\} \cup \left\{ \cos\frac{2\pi nx}{b-a} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$$

והינה מערכת אורתונורמלית סגורה ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

2. המערכת המרוכבת מוגדרת באופן הבא

$$\left\{e^{\frac{2\pi inx}{b-a}} \,|n\in\mathbb{Z}\right\}$$

והינה מערכת אורתונורמלית סגורה ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

נבחין כי עבור $[a,b]=[-\pi,\pi]$ מתקבלות בדיוק המערכות המוכרות.

משפט דיריכלה

הגדרה. תהיינה $f,g\in L_2[-\pi,\pi]$ שתי פונקציות מחזוריות 2π. **הקונבולוציה** בין f ל-g מסומנת ב-$f*g$ ומוגדרת להיות הפונקציה $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{F}$ הנתונה על ידי

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

משפט. תהיינה $f,g\in L_2[-\pi,\pi]$ שתי פונקציות. אז לכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים

$$\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)$$

טענה. תהיינה $f,g,h\in L_2[-\pi,\pi]$ ויהי $c\in\mathbb{F}$. אז

1. קומוטטיביות: $f*g=g*f$.
2. אסוציאטיביות: $f*(g*h)=(f*g)*h$.
3. דיסטריבוטיביות: $(f+g)*h=(f*h)+(g*h)$.
4. כפל סקלר: $(cf)*g=c(f*g)$.
5. $f*g$ מחזורית-2π.

הגדרה. יהי $N\in\mathbb{N}$. הטור פורייה

$$D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

נקרא **גרעין דיריכלה**.

טענה. יהי $N\in\mathbb{N}$.

1. מתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$$

2. תהי $f \in L_2[-\pi,\pi]$ ונניח כי $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. אז

$$S_N[f] \triangleq \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = (f * D_n)(x)$$

3. עבור הטור פורייה הממשי של $D_N(x)$ מתקיים

$$D_N(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos nx$$

בפרט, D_n פונקציה ממשית וזוגית.

4. מתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

5. מתקיים

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & x \neq 0 \\ 2N+1 & x = 0 \end{cases}$$

משפט (דיריכלה). תהי $f \in L_2[-\pi,\pi]$ חלקה למקוטעין, אז לכל $x \in [-\pi,\pi]$ מתקיים

$$\lim_{N\to\infty} S_N[f](x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

כאשר

$$f\left(x_0^+\right) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)\,, f\left(x^-\right) \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

ו-

$$f\left(\pi^+\right) = f\left(-\pi^+\right), f\left(-\pi^-\right) = f\left(\pi^-\right)$$

בפרט, אם f רציפה ב-x אז טור פורייה של f ב-x מתכנס נקודתית ל-$f(x)$.

גזירה ואינטגרציה איבר-איבר

הגדרה. נאמר שפונקציה $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{F}$ **בעלת המשכה מחזורית רציפה** אם לאחר המשכה המחזורית-2π מתקבלת פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$.

טענה. תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{F}$. אז f בעלת המשכה מחזורית רציפה אמ"מ f רציפה ו-$f(-\pi) = f(\pi)$.

משפט (גזירה איבר-איבר). תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{F}$ פונקציה חלקה למקוטעין בעלת המשכה מחזורית רציפה. אם

$$f(x)\sim\frac{a_0}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$$

אז

$$f^{'}(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos nx-na_n\sin nx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}in\hat{f}(n)e^{inx}$$

כאשר a_n,b_n מקדמי פורייה הממשיים של f.

משפט (אינטגרציה איבר-איבר). תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{F}$ פונקציה רציפה למקוטעין כך ש-$\hat{f}(0)=0$, ולכל $x\in[-\pi,\pi]$ נגדיר $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. אם

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\hat{f}(n)e^{inx}$$

אז

$$F(x)\sim\left\langle F,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx=\langle F,1\rangle+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\hat{f}(n)}{in}e^{inx}$$

משפט. תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{F}$ פונקציה חלקה למקוטעין. f בעלת המשכה מחזורית רציפה אמ"מ טור פורייה של f מתכנס במ"ש ל-f ב-$[-\pi,\pi]$.

משפט (מקדמי פורייה). תהיינה $f,g\in L_2[-\pi,\pi]$. אם לכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $\hat{f}(n)=\hat{g}(n)$ אז $f\sim g$. אם בנוסף f,g רציפות, אז $f=g$.

משפט (דעיכת המקדמים). יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{F}$ פונקציה גזירה ברציפות $k-1$ פעמים כך ש-$f^{(j)}$ בעלת המשכה מחזורית רציפה לכל $0\le j\le k-1$ וכך ש-$f^{(k-1)}$ חלקה למקוטעין. אז

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left|n^k\right|\left|\hat{f}(n)\right|=0$$

משפט. תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{F}$ פונקציה בעלת המשכה מחזורית רציפה. נניח שקיימים $M,\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש-$\alpha>1$ ו-$k\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ מתקיים $\left|\hat{f}(n)\right|\le\frac{M}{|n|^{k+\alpha}}$. אז ההמשכה המחזורית של f גזירה ברציפות k פעמים.

התמרת פורייה

הערה. בפרק זה נעסוק בפונקציות המוגדרות ב-$\mathbb{R}$, וזאת בניגוד לפרק הקודם בו עסקנו בפונקציות המוגדרות בקטע סופי. כאן המרחב המתאים הוא

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \left| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty \right. \right\}$$

והכוונה היא לא ל-$\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} |f(x)|\,dx$ אלא ל-

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

הגדרה. הפונקציה $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{F})$ המוגדרת לכל $f \in L_1(\mathbb{R})$ על ידי

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

נקראת **התמרת פורייה**, הפונקציה $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ נקראת **התמרת פורייה של f**.

משפט (ההתכנסות הנשלטת של לבג (Lebesgue Dominated Convergence Theorem)). יהיו $f \in L_1(\mathbb{R})$ ו-$\{f_h\}_{h\in\mathbb{R}} \subseteq L_1(\mathbb{R})$ משפחה של פונקציות ב-$L_1(\mathbb{R})$. נניח כי

1. קיימת פונקציה $g \in L_1(\mathbb{R})$ כך שלכל $x, h \in \mathbb{R}$ מתקיים $|f_h(x)| \le g(x)$.
2. $\lim_{h\to 0} f_h(x) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

אז

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

במילים אחרות

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} f(x)\,dx$$

משפט. תהי $f \in L_1(\mathbb{R})$.

1. $\hat{f}$ מוגדרת היטב.
2. $\hat{f}$ רציפה.
3. רימן-לבג: $\lim_{\omega\to\pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

טענה. יהיו $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ו-$\alpha \in \mathbb{F}$. אז

1. $\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$.
2. $\mathcal{F}[\alpha f] = \alpha \mathcal{F}[f]$.

3. אם f ממשית אז לכל $\omega\in\mathbb{R}$ מתקיים $\hat{f}\left(-\omega\right)=\overline{\hat{f}\left(\omega\right)}$.
4. אם f ממשית וזוגית אז $\hat{f}$ ממשית וזוגית.
5. אם f ממשית ואי-זוגית אז $\hat{f}$ מדומה טהורה ואי-זוגית.

טענה. יהיו $f\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ ו-$a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\neq0$. אז לכל $\omega\in\mathbb{R}$ מתקיים

1. נוסחת ההזזה:
$$\mathcal{F}\left[f\left(ax+b\right)\right]\left(\omega\right)=\frac{1}{\left|a\right|}e^{\frac{ib\omega}{a}}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

2. נוסחת המודולציה:
$$\mathcal{F}\left[e^{icx}f\right]\left(\omega\right)=\hat{f}\left(\omega-c\right)$$

משפט. תהי $f\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ פונקציה גזירה כך שגם $f^{'}\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ וגם $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=0$. אז לכל $\omega\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathcal{F}\left[f^{'}\right]\left(\omega\right)=i\omega\hat{f}\left(\omega\right)$.
בפרט, אם f גזירה ברציפות k פעמים כך שלכל $0\leq j\leq k-1$ מתקיים $f^{(j+1)}\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ וגם $\lim_{x\to\pm\infty}f^{(j)}\left(x\right)=0$ אז $\mathcal{F}\left[f^{(k)}\right]\left(\omega\right)=\left(i\omega\right)^{k}\hat{f}\left(\omega\right)$.

משפט (כלל האינטגרל של לייבניץ). תהי $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{F}$ כך שמתקיים

1. לכל $\omega\in\mathbb{R}$ מתקיים $h\left(\cdot,\omega\right)\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$.
2. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $h\left(x,\cdot\right)$ גזירה ברציפות.
3. קיימת פונקציה $g\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש-$\left|\frac{\partial}{\partial\omega}h\left(x,\omega\right)\right|\leq g\left(x\right)$ לכל $\left(x,\omega\right)\in\mathbb{R}^2$.

אז לכל $\omega\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$\frac{d}{d\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h\left(x,\omega\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}h\left(x,\omega\right)dx$$

משפט. תהי $f\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש-$xf\left(x\right)\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$. אז לכל $\omega\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$\mathcal{F}\left[xf\left(x\right)\right]\left(\omega\right)=i\frac{d}{d\omega}\hat{f}\left(\omega\right)$$

בפרט, $\hat{f}$ גזירה ברציפות.

מסקנה. אם ניתן להשתמש במשפט הקודם k פעמים, אז
$$\mathcal{F}\left[x^kf\left(x\right)\right]\left(\omega\right)=i^k\frac{d}{d^k\omega}\hat{f}\left(\omega\right)$$

משפט (התמרת פורייה ההפוכה). תהי $f\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ חלקה למקוטעין. אז לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M}\hat{f}\left(\omega\right)e^{i\omega x}d\omega=\frac{f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)}{2}$$

בפרט, אם f רציפה, אז
$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M}\hat{f}\left(\omega\right)e^{i\omega x}d\omega=f\left(x\right)$$

כמו כן, אם f רציפה ו-$\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, אז

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x)$$

מסקנה. תהי $f \in L_1(\mathbb{R})$ פונקציה רציפה וחלקה למקוטעין כך ש-$\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. אז $\mathcal{F}^2[f](x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)$ (הרכבה על עצמה של ההתמרה).

משפט (פלנשרל המוכלל). תהיינה $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. אז

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

בפרט

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

הגדרה. תהיינה $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{F}$. לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

אם האינטגרל קיים, הפונקציה $f * g$ נקראת **הקונבולוציה** של f ו-g.

טענה. אם $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ אז גם $f * g \in L_1(\mathbb{R})$.

משפט (הקונבולוציה). תהיינה $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. אז לכל $\omega \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$$