אותות ומערכות (0512-2835)

נכתב ע״י רון גולדמן
מבוסס על ספר הקורס של פרופ׳ תמיר בן דורי וקסם זמיר

תוכן העניינים

רשימת האיורים

פרק 1

אותות

סימון 1.1 (סימון של רון כדי לחסוך כפילות משפטים). יהי T תחום זמן (בקורס זה $T = \mathbb{Z} \vee T = \mathbb{R}$). נסמן ב-$\mathcal{S}_T$ את **אוסף האותות** בזמן T.

הגדרה 1.1. יהי x אות. נגדיר את:

- **האנרגיה** של x:
  - במקטע $n \in [n_1, n_2]$:

$$E_{(n_1,n_2)} \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

  - במקטע $t \in [t_1, t_2]$:

$$E(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

- **ההספק** של x:
  - במקטע $n \in [n_1, n_2]$:

$$P_{(n_1,n_2)} \triangleq \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

  - במקטע $t \in [t_1, t_2]$:

$$P(t_1, t_2) \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

- עבור אינטרוול אינסופי:
  - של אות בדיד:

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2, \qquad P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

– של אות רציף:

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t, \qquad P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t$$

הגדרה 1.2. אות הוא **בעל אנרגיה סופית** אם $E_\infty < \infty$, והוא **בעל הספק סופי** אם $P_\infty < \infty$.

1.1 פונקציית הלם ומדרגה

1.1.1 זמן בדיד

הגדרה 1.3 (הלם בדיד)**.** פונקציית **הלם** (δ של קרונקר) מוגדרת ע"י:

$$\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

הגדרה 1.4 (מדרגה בדידה)**.** פונקציית **מדרגה** מוגדרת ע"י:

$$u[n] \triangleq \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

טענה 1.1. מתקיים:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

טענה 1.2. יהי אות $x \in \mathcal{S}_\mathbb{Z}$, אזי:

$$x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\cdot\delta[n]$$
$$x[n]\cdot\delta[n-n_0] = x[n_0]\cdot\delta[n-n_0]$$

הערה 1.1. $\mathcal{S}_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$.

הגדרה 1.5. יהיו $x, y \in \mathcal{S}_\mathbb{Z}$, **הקונבולוציה** מוגדרת להיות:

$$(x*y)[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]y[n-k]$$

1.1.2 זמן רציף

הגדרה 1.6 (מדרגה רציפה)**.** פונקציית **מדרגה** (פונקציית הביסייד) מוגדרת ע"י:

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

טענה 1.3 (הלם רציף). פונקציית **ההלם** (דלתא של דיראק) מקיימת:

$$u(t) \triangleq \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt$$

טענה 1.4. יהי אות $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, אזי:

$$x(t) \cdot \delta(t) \triangleq x(0) \cdot \delta(t)$$
$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) \triangleq x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

הערה 1.2. נגדיר

$$\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \right) \cup (\mathbb{R} \to \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$$

כלומר אוסף האותות בזמן רציף מכיל פונקציות מתחום ממשי והתפלגויות מהמשפחה של $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ כגון $\ldots, r, u, \delta, \delta', \delta'', \ldots$

הגדרה 1.7. יהיו אותות בזמן רציף $x, y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, **הקונבולוציה** מוגדרת להיות:

$$(x * y)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

1.2 תכונות של אותות

טענה 1.5. כל אות ניתר לתיאור כסכום של אות זוגי ואי-זוגי.

הגדרה 1.8. אות $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ הוא **מחזורי** אם קיים $0 < T \in \mathcal{T}$ כך שלכל $t \in \mathcal{T}$:

$$x(t) = x(t + T)$$

T יקרא **זמן מחזור** של x.

מסקנה 1.1. אם T הוא זמן מחזור, אזי גם כל כפולה שלמה שלו הינה זמן מחזור.

הגדרה 1.9. T נקרא **זמן המחזור הבסיסי** אם הוא זמן המחזור הקטן ביותר.

טענה 1.6. יהי $\omega_0 \in \mathbb{R}$, ויהא האות $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ המוגדר לכל $t \in \mathbb{R}$ על ידי $x(t) = e^{j\omega_0 t}$.
אזי x מחזורי עם מחזור בסיסי $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

טענה 1.7. יהי $\omega_0 \in \mathbb{R}$, ויהא האות $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ המוגדר לכל $n \in \mathbb{Z}$ על ידי $x[n] = e^{j\omega_0 n}$.
אזי x מחזורי אם ורק אם $\frac{2\pi}{\omega_0} \in \mathbb{Q}$ או $\omega_0 = 0$.
בפרט עבור $\omega_0 \neq 0$, כאשר $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{p}{q}$ עבור $p, q \in \mathbb{Z}$ המקיימים $\gcd(p,q) = 1$, המחזור הבסיסי של x נתון על ידי $N = \frac{2\pi}{\omega_0} q$.

פרק 2

מערכות

הגדרה 2.1. מערכת H היא פונקצייה שמקבלת אות ומוציאה אות:

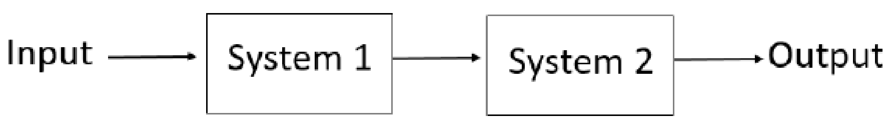
$$H \in A \to B, \qquad A, B \in \{\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{S}_{\mathbb{R}}\}$$

הגדרה 2.2 (חיבור מערכות)**.** נגדיר **חיבור מערכות:**

- **טורי:**

$$H \triangleq H_2 \circ H_1$$

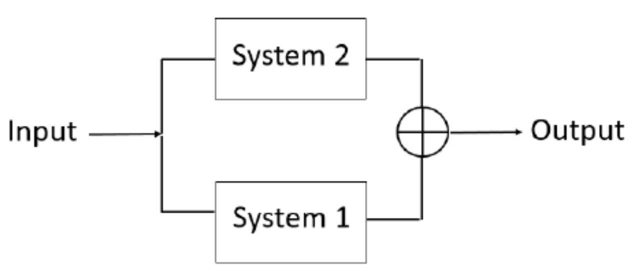
איור 2.1: חיבור טורי של מערכות



- **מקבילי:**

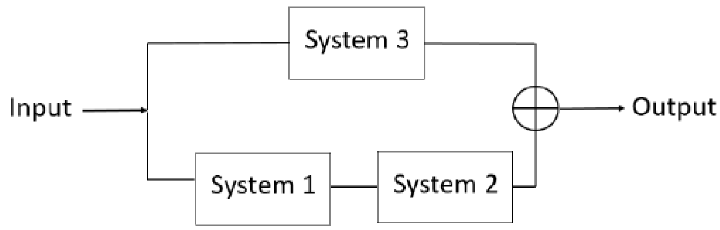
$$H \triangleq H_1 + H_2$$

איור 2.2: חיבור מקבילי של מערכות



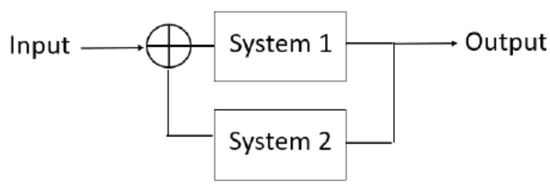
- **משולב** (דוגמא):

איור 2.3: חיבור משולב של מערכות



- **משוב** (דוגמא):

איור 2.4: מערכת משוב



2.1 תכונות של מערכות

הגדרה 2.3. מערכת היא **חסרת זיכרון** אם מוצא מערכת בזמן t_0 תלוי רק בכניסה בזמן t_0.

הגדרה 2.4. מערכת $H:\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2$ היא **הפיכה** אם קיימת מערכת $H^{-1}:B\to A$ כך שלכל $x\in\mathcal{S}_1, y\in\mathcal{S}_2$ מתקיים:

$$\big(H^{-1}\circ H\big)(x)=x\wedge\big(H\circ H^{-1}\big)(y)=y$$

הגדרה 2.5. מערכת $H:\mathcal{S}_T\to\mathcal{S}_T$ בזמן T היא **סיבתית** אם בכל זמן $t_0\in T$ (רציף או בדיד) המוצא תלוי רק בזמנים $T\ni t\leq t_0$.
מערכת היא **אנטי סיבתית** אם בכל זמן $t_0\in T$ המוצא תלוי רק בזמנים $T\ni t> t_0$.

הגדרה 2.6. מערכת $H:\mathcal{S}_T\to\mathcal{S}_T$ בזמן T היא **יציבה BIBO** אם לכל כניסה חסומה $x\in\mathcal{S}_T$:

$$\exists M_1>0.\forall t\in T.\ |x(t)|\leq M_1$$

מוצא המערכת $H(x)=y$ הוא חסום

$$\exists M_2>0.\forall t\in T.\ |y(t)|\leq M_2$$

הגדרה 2.7. מערכת $H:\mathcal{S}_T\to\mathcal{S}_T$ בזמן T היא **קבועה בזמן** אם לכל $t_0\in T$ מתקיים:

$$H\{x(t)\}(t-t_0)=H\{x(t-t_0)\}(t)$$

הגדרה 2.8. מערכת $H:\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2$ היא לינארית אם לכל $x_1,x_2\in A,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ מתקיים

$$H(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha H(x_1)+\beta H(x_2)$$

מסקנה 2.1. אם $H:\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2$ מערכת לינארית אז לכל $x\in\mathcal{S}_1$ כך ש-$x(0)=0$ מתקיים $H\{x\}(0)=0$.

2.2 מערכות לינאריות וקבועות בזמן

הגדרה 2.9. מערכת $H:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ היא **לינארית וקבועה בזמן** (LTI) אם היא לינארית וקבועה בזמן.

הגדרה 2.10. תהא $H:\mathcal{S}_T\to\mathcal{S}_T$ מערכת בזמן T ותהא $\delta\in\mathcal{S}_T$ הלם בזמן T.
האות המוגדר ע"י

$$h\triangleq H\{\delta\}\in\mathcal{S}_T$$

נקרא **התגובה להלם** של המערכת H.

טענה 2.1. יהי $x\in\mathcal{S}_T$ אות בזמן T ותהא $\delta\in\mathcal{S}_T$. אז

$$x=x*\delta$$

מסקנה 2.2. תהא $H:\mathcal{S}_T\to\mathcal{S}_T$ מערכת LTI בזמן T ותהא $h\in\mathcal{S}_T$ התגובה להלם של H.
אז לכל $x\in\mathcal{S}_T$ מתקיים:

$$H\{x\}=x*h$$

רעיון ההוכחה. כאשר $\delta\in\mathcal{S}_T$ מתקיים:

$$H\{x\}=H\{x*\delta\}$$

עבור זמן T נייצג את הסכימה עם אינטגרל:

$$(x*\delta)(t)=\int\limits_T x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

מלינאריות האינטגרל והמערכת:

$$H\left\{\int\limits_T x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}(t)=\int\limits_T H\{x(\tau)\delta(t-\tau)\}(t)d\tau=\int\limits_T x(\tau)H\{\delta(t-\tau)\}(t)d\tau$$

ומהקביעות בזמן:

$$=\int\limits_T x(\tau)H\{\delta(t)\}(t-\tau)d\tau=\int\limits_T x(\tau)h(t-\tau)d\tau=(x*h)(t)$$

■

2.2.1 תכונות של מערכות LTI

משפט 2.1 (חד-ערכיות)**.** קיימת התאמה **חד-ערכית ועל** בין כל מערכת LTI והתגובה שלה להלם.

טענה 2.2 (תכונות של קונבולוציה). יהיו $x, y, z \in \mathcal{S}_T$ אותות בזמן T. אזי:

- קומוטטיביות: $x * y = y * x$.
- דיסטריביוטיביות: $x * (y + z) = x * y + x * z$.
- אסוציאטיביות: $x * (y * z) = (x * y) * z$.

טענה 2.3 (תכונות של מערכות LTI). תהא $H : \mathcal{S}_T \to \mathcal{S}_T$ מערכת LTI בזמן T עם תגובה להלם $h \in \mathcal{S}_T$. אזי:

- זיכרון: H היא חסרת זיכרון אם ורק אם לכל $t \in T \setminus \{0\}$ מתקיים $h(t) = 0$.
- הפיכות: מערכת LTI H_i עם תגובה להלם h_i היא הופכית של H אם ורק אם $h * h_i = \delta$.
- סיבתיות: H מערכת סיבתית אם ורק אם לכל $0 > t \in T$ מתקיים $h(t) = 0$.
- יציבות: H יציבה BIBO אם ורק אם $\|h\|_1 < \infty$.

2.2.2 תיאור מערכות LTI סיבתיות באמצעות משוואות דיפרנציאליות ומשוואות הפרשים

2.2.2.1 מקרה בדיד

נתבונן במשוואת ההפרשים הבאה:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

פתרון משוואת ההפרשים הוא מהצורה

$$y[n] = y_p[n] + \sum_{k=1}^{N} A_k y_h^{(k)}[n]$$

כאשר:

פתרון פרטי: $y_p[n]$ הינו פתרון כלשהו המקיים את המשוואה ללא התייחסות לתנאי ההתחלה.

פתרון הומוגני: $y_h[n]$ הינו פתרון אשר מקיים את המשוואה, כאשר אגף ימין הוא אפס:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

הקבועים $A_1, \dots, A_N$ נקבעים כך שיקיימו את תנאי ההתחלה.

2.2.2.2 מקרה רציף

נתובנן במשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x}{dt^k}$$

הפתרון נתון ע"י:

$$y = y_{zir} + y_{zsr}$$

כאשר y_{zir} מייצג את תגובת המערכת לכניסה ששווה אפס zero input response, ו-y_{zsr} מייצג את תגובת המערכת לתנאי התחלה אפס zero state response.

פרק 3

התמרת Z

3.1 מושגים וטענות בסיסיות

טענה 3.1. תהא $H : \mathcal{S}_\mathbb{Z} \to \mathcal{S}_\mathbb{Z}$ מערכת LTI בזמן בדיד. אז לכל $z \in \mathbb{C}$ האות הבדיד $x[n] = z^n$ הינו **פונקציה עצמית** של המערכת.

הוכחה. תהא h התגובה להלם של המערכת, אזי המוצא $y = H\{x\}$ מקיים:

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} := z^n \cdot H(z)$$

כאשר $H(z)$ הינה פונקציה מרוכבת הנקראת **התמרת** Z של h:

$$H(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

■

הגדרה 3.1. יהי $x \in \mathcal{S}_\mathbb{Z}$ אות בזמן בדיד.

- **התמרת** Z **דו-צדדית** של x נתונה ע"י:

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

  כאשר X **פונקצייה מרוכבת** בעל משתנה $z \in G \subseteq \mathbb{C}$. סימון נוסף:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} x[n]$$

- כאשר נציב $z = e^{j\omega}$ בהתמרת Z נקבל את ה-Discrete Time Fourier Transform (DTFT) של הסדרה $x[n]$:

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]\} = X\left(e^{j\omega}\right) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- תחום ערכים $|z|$ עבורם התמרת Z מתכנסת בהחלט נקרא **Region of Convergence - "ROC"**. התמרת Z **מוגדרת היטב** רק בהינתן ROC.

טענה 3.2 (תכונות של ROC). תהא $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$. אזי:

1. **משפט לורן:**
ה-ROC של $X(z)$ הוא מצורה של טבעת:

$$\mathrm{ROC} = \{\, z \in \mathbb{C} : \ a < |z| < b \,\}$$

כאשר לעיתים ניתן לוותר על a ו-b יכול להיות אינסוף. בפרט, $X(z)$ **אנליטית** ב-ROC.

2. התמרת ה-DTFT קיימת אם ורק אם מעגל היחידה מוכל ב-ROC.

3. ה-ROC לא מכיל את הקטבים של ההתמרה.

4. אם $x[n]$ סדרה סופית, אזי ה-ROC יכיל את כל המישור למעט אולי $z = 0, \infty$.

5. אם $x[n]$ סדרה ימנית ($\exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall n \leq N_1.\ x[n] = 0$) אזי ה-ROC הוא מצורת שמש וקיימות לו שתי אפשרויות:

$$\max|z_p| < |z| \leq \infty \tag{3.1}$$

$$\max|z_p| < |z| < \infty \tag{3.2}$$

$\max|z_p|$ הוא ערכו המוחלט של הקוטב בגדול ביותר של ההתמרה, והתחום יכול להכיל או לא להכיל את האינסוף.

6. אם $x[n]$ סדרה שמאלית ($\exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_1.\ x[n] = 0$) אזי ה-ROC הוא מצורת עיגול וקיימות לו שתי אפשרויות:

$$0 \leq |z| < \min|z_p| \tag{3.3}$$

$$0 < |z| < \min|z_p| \tag{3.4}$$

$\min|z_p|$ הוא ערכו המוחלט של הקוטב הקטן ביותר של ההתמרה, והתחום יכול להכיל או לא להכיל את 0.

7. אם $x[n]$ היא סדרה דו-צדדית ואינסופית, אז נפצל אותה לסכום של סדרה ימנית ושמאלית:

$$x[n] = x_L[n] + x_R[n] \Rightarrow X(z) = X_L(z) + X_R(z)$$

ה-ROC יהיה החיתוך של תחומי ההתכנסות, ולכן ייתכנו מקרים שבהם $\mathrm{ROC} = \emptyset$.

8. אם סדרה $x[n]$ היא סיבתית ($\forall n < 0.\ x[n] = 0$) אזי ה-ROC הינו מצורת שמש אשר מכילה את האינסוף:

$$\max|z_p| < |z| \leq \infty$$

משפט 3.1 (משפט קושי). יהי $x[n]$ אות בזמן בדיד בעל התמרת Z $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$. אז לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{n-1} X(z) dz$$

לכל $\gamma \subset \mathrm{ROC}$ סגורה אשר מקיפה את הראשית.

טענה 3.3. אם $X(z)$ התמרת Z בעלת קוטב z_p אזי ה-ROC שלה לא מכיל את z_p.

משפט 3.2 (משפט הערך ההתחלתי)**.** אם x סדרה סיבתית אז

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

טענה 3.4 (תכונות של התמרת Z). מתקיים:

- <u>לינאריות:</u>
$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z), \mathrm{ROC} \supseteq \mathrm{ROC}_{X_1} \cap \mathrm{ROC}_{X_2}$$

- <u>הזזה בזמן:</u>
$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0}X(z), \mathrm{ROC} \in \{\mathrm{ROC}_X \setminus \{0\}, \mathrm{ROC}_X \setminus \{\infty\}\}$$

- <u>הכפלה באקספוננט:</u>
$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \mathrm{ROC} = \{\, |z_0| \cdot z : \ z \in \mathrm{ROC}_X \,\}$$

- <u>גזירה בתדר:</u>
$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z\frac{dX(z)}{dz}, \mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_X$$

- <u>צמוד קומפלקסי:</u>
$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*), \mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_X$$

- <u>היפוך בזמן:</u>
$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{1}{z}\right), \mathrm{ROC} = \left\{ \frac{1}{z} : \ z \in \mathrm{ROC}_X \right\}$$

- <u>קונבולוציה:</u>
$$(x_1 * x_2)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)X_2(z), \mathrm{ROC} \supseteq \mathrm{ROC}_{X_1} \cap \mathrm{ROC}_{X_2}$$

3.2 מערכות LTI והתמרות Z

טענה 3.5. תהא $H : \mathcal{S}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ מערכת LTI בזמן בדיד עם תגובה להלם $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$. אזי:

- לכל $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ כך ש-$\mathrm{ROC}_X \cap \mathrm{ROC}_H \neq \emptyset$, אם $H\{x\} = y$ אז:
$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

- אם H סיבתית אז ה-ROC מצורת שמש שמכילה את האינסוף: $\mathrm{ROC}_H = \{\max|z_p| < |z|\}$.
- H יציבה BIBO אם ורק אם מעגל היחידה מוכל ב-ROC: $\{|z| = 1\} = \partial\mathbb{D} \subseteq \mathrm{ROC}$.
- אם H יציבה וסיבתית אז כל הקטבים והאפסים של $H(z)$ נמצאים בתוך עיגול היחידה: $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

3.2.1 משוואות הפרשים והתמרות Z

משפט 3.3. תהא H מערכת הנתונה ע"י משוואת ההפרשים:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \qquad a_0, \ldots, a_N, b_0, \ldots, b_M \in \mathbb{C}$$

אזי H לינארית, קבועה בזמן וסיבתית, ואם נסמן:

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$
$$y[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z)$$

אזי התמרת Z של התגובה להלם h של המערכת נתונה ע"י:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k} \\ \Rightarrow & Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \\ \Rightarrow & \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = H(z) \end{aligned}$$

ומעתה נקראת **פונקציית התמסורת של המערכת**. בנוסף ניתן לרשום את התמסורת באמצעות הקטבים והאפסים שלה:

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{M} \left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=0}^{N} \left(1 - d_k z^{-1}\right)}$$

כאשר כל כופל במונה תורם אפס ב-c_k וקוטב בראשית, וכל כופל במכנה תורם קוטב ב-d_k ואפס בראשית.

טענה 3.6. מערכת LTI בדידה H עם התמרת Z $H(z)$ עם תחום התכנסות ROC_H היא הפיכה אם ורק אם קיימת פונקציה $H_i(z)$ המקיימת $H(z)H_i(z) = 1$ עם ROC_{H_i} כך ש-$\mathrm{ROC}_H \cap \mathrm{ROC}_{H_i} \neq \emptyset$.

הגדרה 3.2. מערכת LTI היא **מינימום פאזה** אם היא יציבה, סיבתית והפיכה כך שהמערכת ההופכית לה יציבה סיבתית והפיכה.

מסקנה 3.1. מערכת LTI בדידה H היא מינימום פאזה אם ורק אם כל הקטבים והאפסים של $H(z)$ נמצאים בעיגול היחידה $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

פרק 4

טורי פורייה

4.1 זמן רציף

יהי $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ מחזורי בזמן רציף עם מחזור בסיסי $T > 0$.

הגדרה 4.1. נגדיר את **התדירות הבסיסית** של האות ע"י $\omega_0 \triangleq \frac{2\pi}{T}$. אזי **טור פוריה** של האות מוגדר ע"י:

$$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ נקראים **מקדמי פורייה** של האות ו-$e^{jk\omega_0 t}$ הינן **ההרמוניות** מהן מורכב האות.

הגדרה 4.2. $\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ מהוות בסיס אורתונורמלי במרחב המכפלה הפנימית:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_{\langle T\rangle} f(t)g^*(t)dt$$

כאשר $\langle T\rangle$ הוא מחזור בסיסי כלשהו (האות מחזורי עם מחזור T ולכן זה לא משנה):

$$\langle T\rangle \in \left\{\left[\xi - \frac{T}{2}, \xi + \frac{T}{2}\right] : \xi \in \mathbb{R}\right\}$$

טענה 4.1. לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$a_n = \left\langle x(t), e^{jn\omega_0 t}\right\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

המקדם a_0 מכונה איבר ה-DC.

הגדרה 4.3. נגדיר את **sinc** (פונקציית כיור!)

$$\mathrm{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

נגדיר קירוב:

$$x_N(t) \triangleq \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

עבור $\{a_k\}$ כלשהם.

נגדיר **שגיאת קירוב** באופן הבא:

$$e_N(t) \triangleq x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

ונגדיר את **גודל השגיאה**:

$$E_N = \int\limits_{\langle T\rangle} |e_N(t)|^2 dt$$

אזי השגיאה E_N מינימלית אם

$$a_k = \frac{1}{T}\int\limits_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

מסקנה 4.1. אם ניתן לחשב את מקדמי פורייה לאות מחזורי $x(t)$, אזי הקירוב הטוב ביותר ל-$x(t)$ בעזרת מספר סופי של הרמוניות בסיסיות הוא $x_N(t)$.

בפרט:

$$\lim_{N\to\infty} E_N = 0$$

טענה 4.2. עבור $x(t)$ מחזורי, אם $E_{\langle T\rangle} < \infty$ אזי:

- לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a_k < \infty$ וכן (הלמה של רימן-לבג):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- גם כן:

$$\lim_{N\to\infty} E_N = 0$$

משפט 4.1 (משפט דיריכלה לטור פוריה)**.** יהי $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ המקיים את התנאים הבאים:

1. $\int_{\langle T\rangle} |x(t)|dt < \infty$.
2. בכל קטע סופי של זמן $[a,b]$ נקודות המינימום ומקסימום של $x(t)$ הן קבוצה זניחה.
3. בכל קטע סופי של זמן $[a,b]$ נקודות אי-הרציפות של $x(t)$ הן קבוצה זניחה, וכן כולן אי-רציפות סופית.

אזי x וטור פורייה שלו $S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ מזדהים בכל נקודה, פרט לנקודות אי הרציפות של x ששם

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2}$$

טענה 4.3 (תכונות טורי פוריה בזמן רציף). עבור אותות מחזוריים עם מחזור זהה T נסמן את מקדמי פורייה בצורה הבאה:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k, y(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} b_k$$

- <u>לינאריות:</u>

$$Ax(t) + By(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} Aa_k + Bb_k$$

- <u>הזזה בזמן:</u>

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{FS}} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

- <u>היפוך בזמן:</u>

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}$$

- <u>כיווץ ומתיחה בזמ:</u>

$$x(\alpha t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_k, T^{'} = \frac{T}{\alpha}$$

- <u>כפל בזמן:</u>

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell b_{k-\ell} = a_k * b_k$$

- <u>צמוד קומפלקסי:</u>

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a^*_{-k}$$

- <u>קונבולוציה מחזורית בזמן:</u>

$$(x \circledast y)(t) = \int_{\langle T \rangle} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{FS}} T \cdot a_k \cdot b_k$$

- <u>משפט פרסבל:</u>

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

4.2 זמן בדיד

יהי $x \in \mathcal{S}_\mathbb{Z}$ מחזורי בזמן בדיד עם מחזור בסיסי $N > 0$.

הגדרה 4.4. נגדיר את **התדירות הבסיסית** של האות ע"י $\omega_0 \triangleq \frac{2\pi}{N}$. אזי **טור פוריה** של האות מוגדר ע"י:

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

כאשר $\langle N \rangle \in \{\{m, \ldots, m+N\} : m \in \mathbb{Z}\}$ כלשהו (האות מחזורי אז לא משנה).

טענה 4.4. לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

בפרט מקדמי פורייה הם מחזוריים עם מחזור בסיסי N:

$$\forall k \in \mathbb{Z}.\ a_k = a_{k+N}$$

4.2.1 תכונות טורי פוריה

טענה 4.5. אם $x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} b_k e^{jk\omega_0 n}$, נסמן $x[n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} a_k, y[n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} b_k$.

- לינאריות:

$$Ax[n] + By[n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} Aa_k + Bb_k$$

- הזזה בזמן:

$$x[n - n_0] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$$

- הזזה בתדר:

$$e^{jm\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} a_{k-m}$$

- צמוד קומפלקסי:

$$x^*[n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} a^*_{-k}$$

- היפוך בזמן:

$$x[-n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} a_{-k}$$

- הכפלה:

$$x[n] \cdot y[n] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} \sum_{\ell=0}^{N-1} a_\ell b_{k-\ell} = \left(a \circledast^N b\right)_k$$

- משפט פרסבל:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2$$

- קונבולוציה מחזורית:

$$\left(x \circledast^N y\right)[n] = \sum_{r=0}^{N-1} x[r] y[n-r] \xrightarrow{\mathcal{DFS}} N a_k \cdot b_k$$

פרק 5

התמרת פוריה

5.1 בזמן רציף

הגדרה 5.1. התמרת פורייה היא הפונקציה $\mathcal{F}:\mathcal{S}_{\mathbb{R}}\to\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ כך שלכל $x\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, **התמרת פורייה של x** (אם קיימת) נתונה לכל $\Omega\in\mathbb{R}$ על ידי:

$$\mathcal{F}\{x(t)\}(\Omega) \coloneqq X(\Omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

התמרת פורייה ההפוכה (אם קיימת) מוגדרת לכל $t\in\mathbb{R}$ ע"י:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

טענה 5.1 (הקשר בין התמרת פורייה לטור פורייה). אם $x_p(t)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ אזי:

$$X_p(\Omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\Omega-k\omega_0)$$

בפרט אם נגדיר:

$$x(t)=\begin{cases}x_p(t), & |t|<\frac{\pi}{\omega_0}\\ 0, & |t|\geq\frac{\pi}{\omega_0}\end{cases}$$

אזי:

$$a_k=\frac{\omega_0}{2\pi}X(k\omega_0)$$

5.1.1 תנאי התכנסות וקיום

טענה 5.2. אם $x\in L_2(\mathbb{R})$ אזי $X=\mathcal{F}\{x\}\in L_2(\mathbb{R})$.

משפט 5.1 (יחידות התמרת פוריה). יהי $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ כך שקיימת לו התמרת פורייה $X = \mathcal{F}\{x\}$. נגדיר את האות $\hat{x} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ ע"י:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} \mathrm{d}t = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}(t)$$

נגדיר את השגיאה בין האותות ע"י:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

אזי השגיאה מתכנסת בנורמה ל-0:

$$e(t) \sim 0 \iff \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 \mathrm{d}t = 0$$

כלומר $x, \hat{x}$ זהים עד כדי מספר בן מניה של נקודות.

טענה 5.3 (משפט דיריכלה). יהי $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ המקיים את התנאים הבאים:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty$ ($x \in L_1(\mathbb{R})$).
2. ל-$x(t)$ מספר סופי של נקודות קיצון בכל מקטע סופי.
3. ל-$x(t)$ מספר סופי של נקודות אי רציפות בכל מקטע סופי.

אזי, האותות $x, \hat{x}$ מזדהים בכל הנקודות, פרט לנקודות אי רציפות, שם

$$\hat{x}(t) = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2}$$

5.1.2 תכונות

טענה 5.4. עבור אות $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ כך ש-$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ נסמן

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(\Omega)$$

אזי:

- <u>לינאריות:</u>

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} aX(\Omega) + bY(\Omega)$$

- <u>הזזה בזמן:</u>

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(\Omega) e^{-j\Omega t_0}$$

- <u>הזזה בתדר:</u>

$$x(t) e^{j\Omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(\Omega - \Omega_0)$$

- <u>צמוד קומפלקסי:</u>

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X^*(-\Omega)$$

- גזירה:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{FT}} j\Omega X(\Omega)$$

- אינטגרציה:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{j\Omega}X(\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$$

- מתיחה וכיווץ:

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

- משפט פרסבל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2\mathrm{d}\Omega$$

- קונבולוציה בזמן:

$$(x * y)(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} X(\Omega)\cdot Y(\Omega)$$

- הכפלה בזמן:

$$x(t)\cdot y(t) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{1}{2\pi}(X * Y)(\Omega)$$

- קיום תגובת תדר: אם $H : \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ מערכת LTI אז אם H יציבה אז התמרת פורייה של התגובה להלם $H(\Omega)$ קיימת.

5.2 בזמן בדיד

הגדרה 5.2 (תזכורת)**. התמרת פורייה בזמן בדיד** (DTFT) היא הפונקציה $\mathrm{DTFT} : \mathcal{S}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ כך שלכל $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ ה-DTFT שלה מוגדרת לכל $\omega \in \mathbb{R}$ ע"י:

$$X\left(e^{j\omega}\right) := \mathrm{DTFT}\{x[n]\}(\omega) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

הביטוי **להתמרת ה-**DTFT ההפוכה נתון ע"י:

$$\mathrm{DTFT}^{-1}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} \triangleq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega}\mathrm{d}\omega$$

טענה 5.5. התמרת פורייה של $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ קיימת אם ורק אם $x \in L_1(\mathbb{Z})$. בפרט:

$$x = \mathrm{DTFT}^{-1}\left\{\mathrm{DTFT}\{x[n]\}\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

טענה 5.6. אם $x[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}a_ke^{jk\omega_0n}$ אז (כאשר ממשיכים את a_k מחזורית):

$$X\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-\omega_0k)$$

5.2.1 תכונות ה-DTFT

טענה 5.7. עבור $x\in\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ בעל DTFT X נסמן

$$x[n]\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}X\left(e^{j\omega}\right)$$

אזי:

- <u>מחזוריות:</u>

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

- <u>לינאריות:</u>

$$ax[n]+by[n]\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}aX\left(e^{j\omega}\right)+bY\left(e^{j\omega}\right)$$

- <u>הזזה בזמן:</u>

$$x[n-n_0]\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}e^{-jn_0\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

- <u>הזזה בתדר:</u>

$$x[n]e^{jn\omega_0}\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

- <u>צמוד קומפלקסי:</u>

$$x^*[n]\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

- <u>גוזר:</u>

$$x[n]-x[n-1]\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}\left(1-e^{-j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

- <u>מסכם:</u>

$$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X\left(e^{j\omega}\right)+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

- <u>היפוך בזמן:</u>

$$x[-n]\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}X\left(e^{-j\omega}\right)$$

- <u>מתיחה בזמן:</u>

$$x_k[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{k}\right], & \frac{n}{k}\in\mathbb{Z}\\ 0, & \frac{n}{k}\notin\mathbb{Z}\end{cases}\overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow}X\left(e^{j\omega k}\right)$$

- גזירה בתדר:

$$nx[n] \overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow} j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

- משפט פרסבל:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

- קונבולוציה:

$$(x*y)[n] \overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)\cdot Y\left(e^{j\omega}\right)$$

- מכפלה:

$$x[n]\cdot y[n] \overset{\mathcal{DTFT}}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X\left(e^{j\theta}\right)Y\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta=\frac{1}{2\pi}\left(X\circledast^{2\pi}Y\right)\left(e^{j\omega}\right)$$

פרק 6

דגימה ושחזור

6.1 דגימה נקודתית

הגדרה 6.1. יהי אות בזמן רציף $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ תהא סדרת ערכים $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$.
נגדיר את **הדגימה הנקודתית של x** לפי t_n ע"י:

$$x[n] \triangleq x(t_n)$$

אם $t_n = nT$ עבור $T > 0$ אזי הדגימה תיקרא **דגימה אחידה**.

הגדרה 6.2. יהי אות בזמן רציף $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, ויהי $T > 0$. נגדיר:

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

ואיתו את פעולת **הדגימה**:

$$x_p(t) = x(t) \cdot p_T(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$
$$\Longrightarrow x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

6.1.1 דגימה באמצעות Impulse Response

טענה 6.1. יהי אות בזמן רציף $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, ונסמן $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ אז עבור רכבת הלמים מתקיים

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

ולכן כאשר $x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$ מתקיים:

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$$

6.1.2 משפט הדגימה של שאנון-נייקוויסט

הגדרה 6.3. יהי אות בזמן רציף $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. נאמר כי x **סופי בתדר** (חסום בספקטרום) אם קיים $\Omega_m > 0$ כך שלכל $|\Omega| > \Omega_m$ מתקיים $X(\Omega) = 0$.

משפט 6.1 (משפט הדגימה של שאנון-נייקוויסט). יהי אות בזמן רציף $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ חסום בספקטרום על ידי $\Omega_m > 0$ ($\forall |\Omega| > \Omega_m.\ X(\Omega) = 0$).
אזי x יכול להיקבע מדגימותיו $x[n] = x(nT_s)$ בתנאי שתדירות הדגימה $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ מקיימת $\Omega_s > 2\Omega_m$.

- Ω_m מכונה **רוחב הפס** של האות.
- $\Omega_{\text{Ny}} = 2\Omega_m$ מכונה **תדר נייקוויסט**.

6.2 תהליך השחזור

טענה 6.2. בהינתן $x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ חסום בספקטרום על ידי $\Omega_m > 0$.
אם תדירות הדגימות שלנו מקיימת את תנאי נייקוויסט ($\Omega_s > 2\Omega_m$), אזי ניתן לשחזר את x מתוך x_p על ידי מעבר במסנן:

$$H_{\text{LPF}}(\Omega) = \begin{cases} T_s, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

כאשר $\Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$.

6.2.1 מקורות שגיאה

1. קצב הדגימה נמוך מדי. במקרה הזה תיתכן תופעת aliasing ולא בהכרח נוכל לשחזר את האות באופן מושלם.
2. באופן מעשי לא ניתן לממש מסנן אידאלי. לכן, המסנן המעשי יכניס שגיאת שחזור. מסנן LP אידיאלי מתואר ע"י פונקציית sinc בזמן.

$$h_{\text{LPF}}(t) = T_s \cdot \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right)$$

6.3 דגימה לא נקודתית

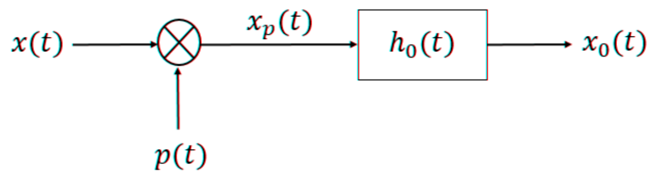
6.3.1 דגימה באמצעות ZOH - Zero Order Hold

הגדרה 6.4 (דגימה באמצעות ZOH). בהינתן אוסף דגימות $x(nT)$ של אות רציף $x(t)$, ניצור אות דגום $x_0(t)$ באופן הבא:

$$x_0(t) = x\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right)$$

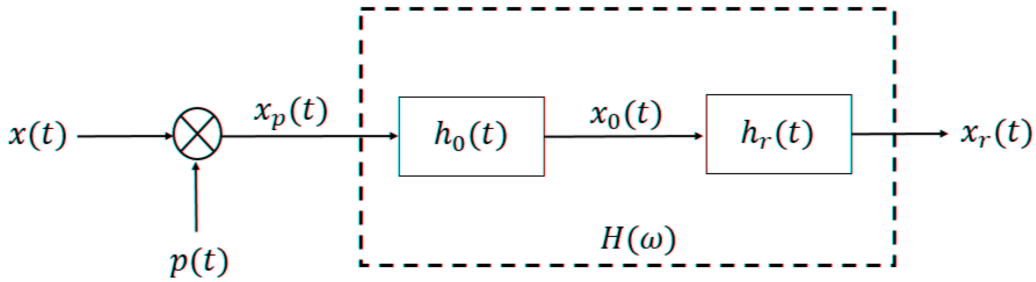
טענה 6.3. כאשר $h_0(t) = u(t) - u(t-T)$ היא חלון ו-$p(t)$ רכבת הלמים $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ מתקיים:

$$x_0(t) = (x(t) \cdot p(t)) * h_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_0(t - nT)$$



איור 6.1: דגימה בשיטת ZOH

כעת נסמן ב-$h_r(t)$ את מסנן השחזור וב-$H_r(\Omega)$ את תגובת התדר שלו.



איור 6.2: שחזור של ZOH

נסמן ב-$H(\Omega)$ את תגובת המערכת הכוללת, שהיא שרשור H_0 ו-H_r:

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= H_0(\Omega)H_r(\Omega) \\ \Longrightarrow H_r(\Omega) &= \frac{H(\Omega)}{H_0(\Omega)} \end{aligned}$$

נשים לב כי h_0 הינו חלון שממורכז סביב $\frac{T}{2}$ ובעל רוחב T, ומכאן כי תגובת התדר שלה הינה:

$$H_0(\Omega) = e^{-j\Omega\frac{T}{2}} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\Omega}$$

ראינו כבר כי על מנת לשחזר אות דגום $x_p(t)$ צריך להעביר אותו ב-LPF ולכן נדרוש כי $H(\Omega)$ היא LPF אידיאלי ולכן:

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{H_0(\Omega)}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

6.4 שחזור של אות באמצעות אינטרפולציה interpolation

הגדרה 6.5. אינטרפולציה של דגימה $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$ באמצעות **גרעין אינטרפולציה** $h(t)$ היא

$$x_r(t) = (x_p * h)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

טענה 6.4. שחזור של אות באמצעות ZOH היא אינטרפולציה עם גרעין $h_0(t) = u(t) - u(t-T)$.

הגדרה 6.6 (שחזור באמצעות FOH - First Order Hold). בהינתן אות רציף $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$ עבור FOH גרעין האינטרפולציה הינו משולש:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| < T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases}$$

כלומר:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_1(t-nT)$$

תגובת התדר של גרעין אינטרפולציה FOH הינה:

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{T}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$$

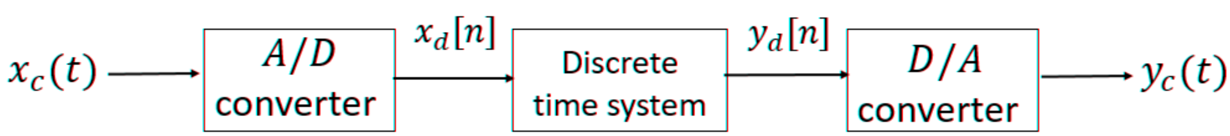
שיטת השחזור הנ"ל מבצעת חיבור של קו לינארי העובר בין כל שתי נקודות דגימה עוקבות.

טענה 6.5. משפט הדגימה הוא שחזור בעזרת אינטרפולציה עם גרעין

$$h_{\mathrm{LPF}}(t) = T_s \cdot \frac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega_c t}{\pi}\right)$$

6.5 עבוד זמן בדיד של אותות בזמן רציף

במקרים רבים, נרצה לדגום אות אנלוגי ולבצע עליו עיבוד ספרתי (דיגיטלי). במקרים רבים גם נרצה לחזור לזמן רציף. כאן בא לידי ביטוי הנושא של דגימה נקודתית, point sampling.
מערכת כזאת מתוארת ע"י הדיאגרמה:



איור 6.3: עיבוד בזמן בדיד

אם $x_c(t)$ הוא חסום סרט ומערכת הדגימה מקיימת את תנאי נייקוויסט הרי שהאות בזמן בדיד $x_d[n]$ מכיל את האינפורמציה של האות הרציף. בעוד שפעולת ה-A/D היא דגימה, פעולת ה-D/A היא שחזור ע"י אינטרפולציה.

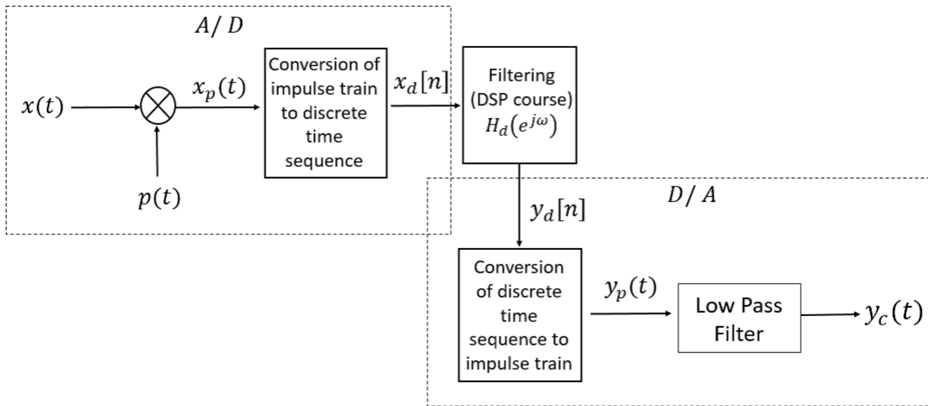
6.5.1 שלב ה-A/D

טענה 6.6. אם $x_c(t)$ האות הרציף ו-$x_d[n]$ סדרת הדגימות שלו בתדר T אזי מתקיים הקשר:

$$X_d\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

6.5.2 שלב ה-D/A

טענה 6.7. עבור המערכת הבאה שדוגמת ומשחזרת עם זמן דגימה T_s שמקיים את תנאי נייקוויסט:



איור 6.4: עבוד זמן בדיד של אותות בזמן רציף

ניתן לתאר את פעולת המערכת הכוללת עם פונקציית התמסורת $H_c(\Omega)$ כאשר $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$:

$$H_c(\Omega) = \begin{cases} T_s \cdot H_d\left(e^{j\Omega T_s}\right), & |\Omega| < \frac{\Omega_2}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_2}{2} \end{cases}$$

פרק 7

ייצוג פוריה של סדרות סופיות בזמן

DFT - Discrete Fourier Transform

7.1 הגדרות

הגדרה 7.1. סדרה $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ נקראת **סדרה סופית באורך** N.

לשם פשטות נזהה סדרות אינסופיות $\{x[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ כך ש-$x[n]=0$ $\forall n<0 \vee n>N-1$. עם הסדרה הסופית $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ באורך N.

לסדרה נשייך אות מחזורי:

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]=x[n \bmod N]$$

הגדרה 7.2. נגדיר סדרת ***מקדמי*** **DFT** באורך N כמחזור אחד של $\tilde{X}[k]$ כך ש:

$$\mathrm{DFT}_N\{x[n]\}[k] \triangleq X[k]=\begin{cases}\tilde{X}[k], & 0\le k\le N-1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

הגדרה זאת שקולה להגדיר סדרה סופית: $\{X[k]\}_{k=0}^{N-1}=\left\{\tilde{X}[k]\right\}_{k=0}^{N-1}$.

טענה 7.1. לכל סדרה סופית באורך N מתקיים:

$$X[k]=\frac{1}{N}a_k$$

כאשר a_k מקדמי פורייה של $\tilde{x}[n]$.

7.2 תכונות

טענה 7.2 (תכונות ה-DFT). נסמן א תהסדרו תבאורך סופי N בתור $x[n], y[n]$. אזי:

- <u>לינאריות:</u>

$$ax[n]+by[n]\overset{\mathcal{DFT}_N}{\longrightarrow} aX_1[k]+bX_2[k]$$

- <u>הזזה מעגלית:</u>

$$x[n-m] \overset{\mathcal{DFT}_N}{\longrightarrow} X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$

- <u>קונבולוציה ציקלית בזמן:</u>

$$\left(x \circledast^N y\right)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[(n-m) \bmod N] \overset{\mathcal{DFT}_N}{\longrightarrow} X[k] \cdot Y[k]$$

- <u>הכפלה בזמן:</u>

$$x[n] \cdot y[n] \overset{\mathcal{DFT}_N}{\longrightarrow} \frac{1}{N}\left(X_2 \circledast^N X_2\right)[k]$$

7.3 מעבר בין קונבולוציה מחזורית לקונבולוציה לינארית

טענה 7.3. תהינא $x_1[n], x_2[n]$ שני סדרות סופיות באורך N_1, N_2 בהתאמה. אזי סדרת הקונבולוציה:

$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$$

תהיה באורך $N_3 = N_1 + N_2 - 1$.

טענה 7.4. תהינא $x_1[n], x_2[n]$ שני סדרות סופיות באורך N_1, N_2 בהתאמה, שרופדו באפסים כך שיהיו באורך $N = N_1 + N_2 - 1$. אזי הקונבולוציה הלינאריות והקונבולוציה המחזורית בין האותות, זהות על המקטע $0 \le n \le N_1 + N_2 - 2$:

$$\sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} x_1[m]x_2[(n-m) \bmod (N_1+N_2-1)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$$

7.4 אלגוריתם ה-FFT(Fast Fourier Transform)

אלגוריתם FFT הוא אלגוריתם יעיל לחישוב התמרת פוריה בדידה DFT וההתמרה ההופכית לה.

אלגוריתם 7.1. יהי $N = 2^k$ עבור $k \in \mathbb{N}$ ותהא $x[n]$ סדרה סופית באורך N. נחלק את הסכום שמגדיר את ה-DFT_N לסכום על זוגיים ואי-זוגיים בנפרד:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]e^{-j\frac{2\pi}{N}k2m} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2m+1)}$$

כעת ניתן לכתוב את ה-DFT_N כ-$\mathrm{DFT}_{\frac{N}{2}}$ על הסכומים הזוגיים והאי-זוגיים:

$$X[k] = X_{\frac{N}{2}}^{\text{even}}[k] + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} X_{\frac{N}{2}}^{\text{odd}}[k]$$

מניצול המחזוריות של האיברים $e^{j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}k}$, נקבל שחישוב האיברים בתחום $k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1$ שקול לחישוב האיברים $k = \frac{N}{2}, \dots, N-1$:

$$X[k] = \begin{cases} X_{\frac{N}{2}}^{\text{even}}[k] + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} X_{\frac{N}{2}}^{\text{odd}}[k], & 0 \le k \le \frac{N}{2}-1 \\ X_{\frac{N}{2}}^{\text{even}}\left[k-\frac{N}{2}\right] + e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k-\frac{N}{2}\right)} X_{\frac{N}{2}}^{\text{odd}}\left[k-\frac{N}{2}\right], & \frac{N}{2} \le k \le N-1 \end{cases}$$

ומכאן שאם $T(N)$ סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם, אזי בכל איטרציה נבצע עבודה של $O(N)$ ע"י הזזה והכפלה בפאזה ולכן נקבל את המשוואה הרקורסיבית:

$$T(N) = 2T\left(\frac{N}{2}\right) + O(N)$$

ולפי משפט המאסטר נקבל כי $T(N) = O(N\log N)$.